Задача №41.

Выполнил студент 412 группы Зацепин Андрей.

Постановка задачи: Пусть $W = \{W_t, t \in [0;\infty)\}$ - процесс броуновского движения, $\tau = inf\{s \geq 0 : W_s = x\}$. Доказать, что

$$\frac{d}{dt}P\{\tau_x \leq t\} = \frac{x}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{-x^2}{2t}}, \quad \forall\ t > 0, \quad \forall\ \ x > 0.$$

Доказательство: Воспользуемся тем, что в случае броуновского движения мы имеем процесс, приращения которого за непересекающиеся промежутки времени независимы и имеют симметричное нормальное распределение с дисперсией t. Так же учтем, что траектории процесса непрерывно зависят от времени. При $W(0) = 0$ существует момент τ_x, в который частица впервые достигает уровня $x > 0$. Для нахождения функции распределения $F_x(t) = P\{T_x \leq t\}$ заметим, что броуновское движение - процесс без последействия. Это означает, что приращение абсциссы $W(t + \tau_x) - x$ между моментами времени τ_x и $\tau_x + t$ не зависит от течения процесса до момента τ_x. Далее, чтобы достигнуть уровня $x + y > x$, частица должна достигнуть уровня x, и поэтому время ожидания $\tau_{x+y} - \tau_x$ до достижения уровня $x + y$ после достижения x не зависит от τ_x и имеет распределение, одинаковое с распределением τ_y. Иными словами, $F_x * F_y = F_{x+y}$. Так как вероятности перехода зависят лишь от отношения $\frac{x^2}{t}$ (у нас нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией t), то τ_x имеет тоже распределение, что и $x^2\tau_1$. Это означает, что распределения τ_x отличаются лишь масштабным множителем и, следовательно, устойчивы с характеристическим показателем $\alpha = \frac{1}{2}$.

Теперь рассмотрим распределение, устойчивое с $\alpha = \frac{1}{2}$, а после покажем, что искомое распределение совпадает с его распределением.

Как известно(это можно посмотреть в Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. М.: Мир, 1967, страница 216), распределение

$$F(x) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right], \quad x > 0, \tag{1}$$

($\Phi(x)$ - функция распределения нормального закона) имеющее плотность:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x > 0$$

($f(x) = 0, x < 0$), строго устойчиво с нормирующими постоянными $c_n = n^2$.

Если воспользоваться этим фактом, то нам остается показать, что распределение 1 совпадает с искомым распределением τ_x. Для этого воспользуемся рассуждением, основанном на соображениях симметрии. В силу непрерывности траекторий событие $W(t) > x$ может произойти лишь в том случае, когда уровень x был пересечен в некоторый момент $\tau_x < t$. Если $\tau_x = T < t$, то $W(T) = x$, и из симметрии ясно, что вероятность события

$W(t) - W(T) > 0$ равна $\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$P\{\tau_x < t\} = 2P\{W(t) > x\} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right],$$

что и требовалось. Для получения окончательного ответа продифференцируем по t полученную функцию распределения:

$$\frac{d}{dt}\left(2\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right]\right) = \frac{d}{dt}\left[2 - 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right] = -2\Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) =$$

$$= -2\left[\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2t}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{t^{3/2}}\right] = \frac{x}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

что и требовалось доказать.